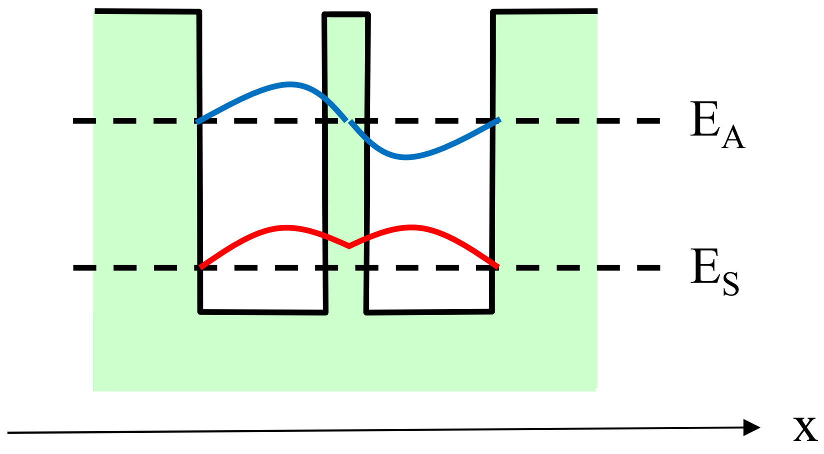
Exercice 3.1: double puits couplés

$$|\psi(x,t)\rangle \cong \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \end{pmatrix}$$

$\alpha_1(t)$ ← «puits de gauche»

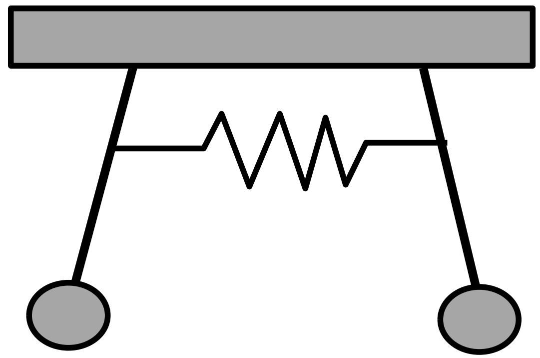
$\alpha_2(t)$ ← «puits de droite»



Soit les modes propres $|\varphi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'énergie E_S

$|\varphi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ d'énergie E_A

Modèle



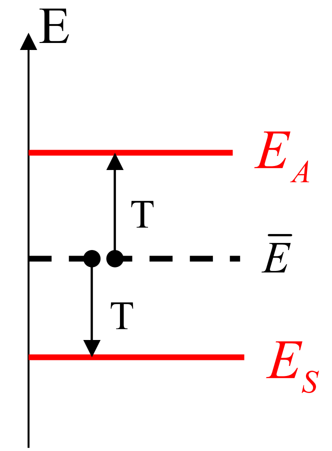
Déterminez l'Hamiltonien $H = ?$

Double puits couplés

Valeurs propres	Modes propres		Projecteurs
E_S	$\lvert\varphi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$	$\Rightarrow$	$P_S \equiv \lvert\varphi_S\rangle\cdot\langle\varphi_S\rvert = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$
E_A	$\lvert\varphi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$	$\Rightarrow$	$P_A \equiv \lvert\varphi_A\rangle\cdot\langle\varphi_A\rvert = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}$

Hamiltonien:

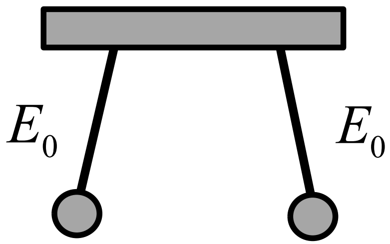
$$H \equiv \sum_{i=S,A} E_i \cdot P_i = \begin{pmatrix}\bar{E} & -T\\-T & \bar{E}\end{pmatrix}$$



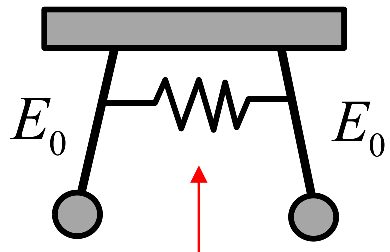
avec

$$\bar{E} \equiv \frac{E_A + E_S}{2} \quad \text{et} \quad T \equiv \frac{E_A - E_S}{2}$$

Deux pendules identiques



$|\varphi_I\rangle$ $|\varphi_{II}\rangle$



$$\frac{1}{2}\kappa(x_1 - x_2)^2$$

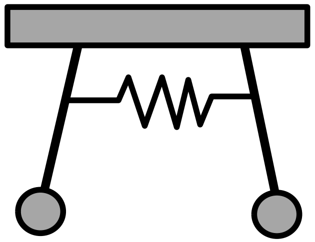
Hamiltonien:

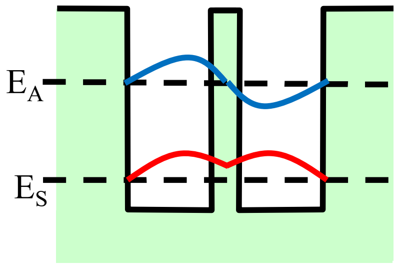
$$= \frac{1}{2}\left(x_1 \cdot \kappa \cdot x_1 - x_2 \cdot \kappa \cdot x_1 - x_1 \cdot \kappa \cdot x_2 + x_2 \cdot \kappa \cdot x_2\right)$$

$$H = \begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & E_0 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} E_0 + T & -T \\ -T & E_0 + T \end{pmatrix}$$

Deux pendules identiques



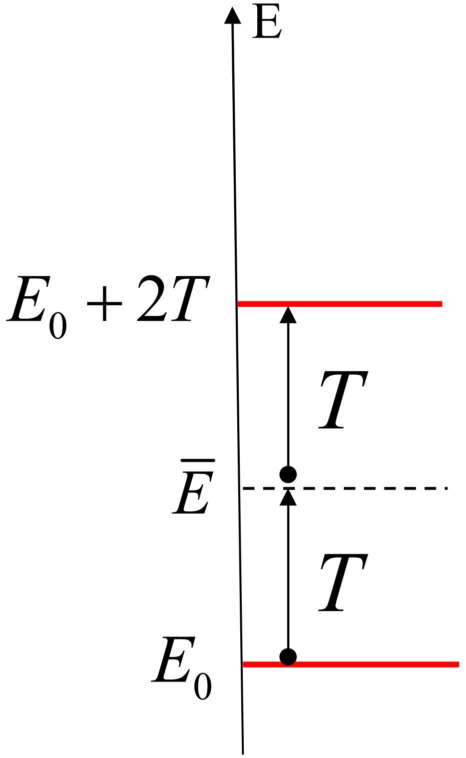


$$H = \begin{pmatrix} E_0 + T & -T \\ -T & E_0 + T \end{pmatrix}$$

Valeurs propres

E_0 et $E_0 + 2T$

Valeurs propres



Modes propres

$$|\varphi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

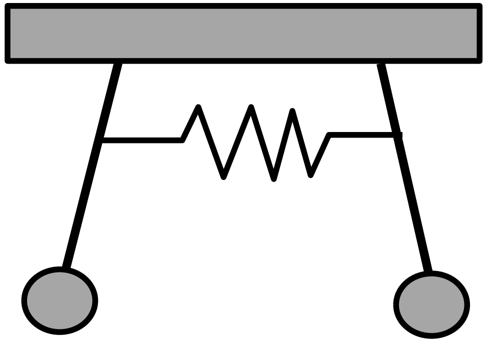
$$|\varphi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

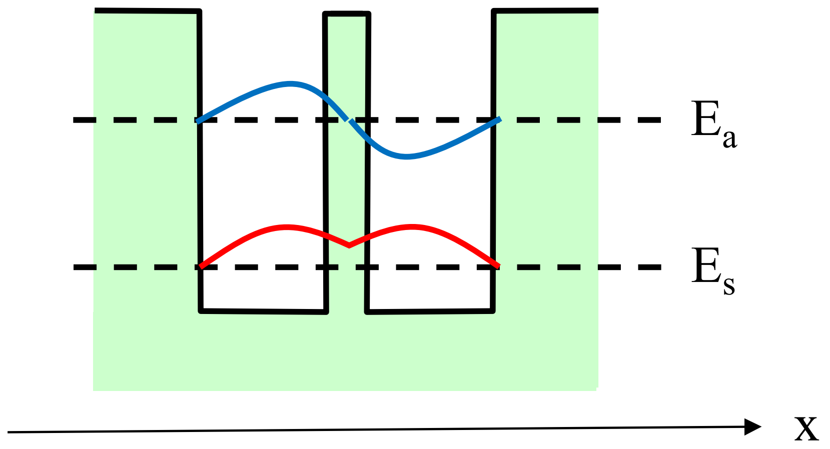
Exercice 3.2: double puits couplé symétrique avec input à gauche

Décrivez l'évolution temporelle de la fonction d'onde d'un double puits couplé.
En t=0 l'entrée de gauche est excitée.

- **Quelle est la probabilité d'être dans l'état de gauche en t>0 ?**
- **Et dans l'état de droite ?**

Comment évolue son énergie dans le temps ?





Double puits couplé symétrique avec input à gauche

Modes propres

$$\left|\varphi_S\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\left|\varphi_A\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

Mode en t=0

$$\left|\psi(0)\right\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\left|\psi(0)\right\rangle = \left\langle\varphi_S\right|\left|\psi(0)\right\rangle\cdot\left|\varphi_S\right\rangle + \left\langle\varphi_A\right|\left|\psi(0)\right\rangle\cdot\left|\varphi_A\right\rangle$$

$$\left|\psi(0)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left|\varphi_S\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left|\varphi_A\right\rangle$$

Evolution du mode

$$\left|\psi(t)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\varphi_S\right\rangle\cdot e^{-i\frac{E_S}{\hbar}t} + \left|\varphi_A\right\rangle\cdot e^{-i\frac{E_A}{\hbar}t}\right) = e^{-i\frac{\bar{E}}{\hbar}t}\cdot\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{T}{\hbar}t\right)\\ i\cdot\sin\left(\frac{T}{\hbar}t\right)\end{pmatrix}$$

Probabilité d'être à gauche:

$$\left|\left\langle\varphi_G\right|\left|\psi(t)\right\rangle\right|^2 = \left|\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\cdot\left|\psi(t)\right\rangle\right|^2 = \cos^2\left(\frac{T}{\hbar}t\right)$$

Probabilité d'être à droite:

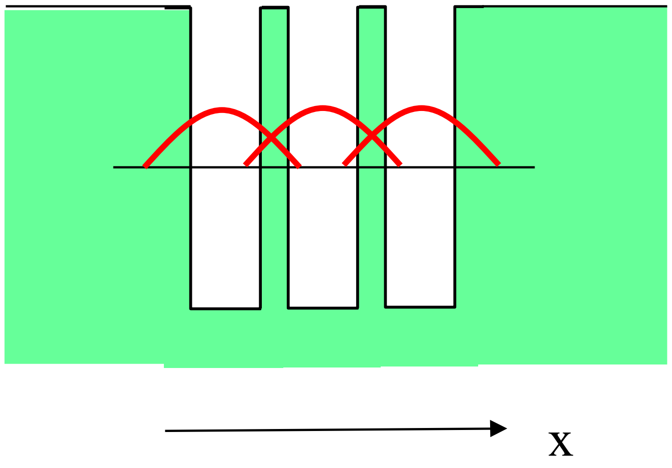
$$\left|\left\langle\varphi_D\right|\left|\psi(t)\right\rangle\right|^2 = \left|\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\cdot\left|\psi(t)\right\rangle\right|^2 = \sin^2\left(\frac{T}{\hbar}t\right)$$

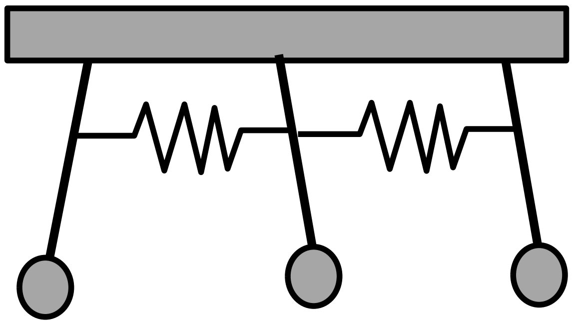
Evolution de l'énergie:

E_S E_A 0 0

$$\left\langle E(t)\right\rangle = \left\langle\psi(t)\right|E\left|\psi(t)\right\rangle = \frac{1}{2}\left(\left\langle\varphi_S\right|E\left|\varphi_S\right\rangle + \left\langle\varphi_A\right|E\left|\varphi_A\right\rangle + \left\langle\varphi_S\right|E\left|\varphi_A\right\rangle + \left\langle\varphi_A\right|E\left|\varphi_S\right\rangle\right) = \frac{E_S + E_A}{2} = \bar{E} = \text{constante}$$

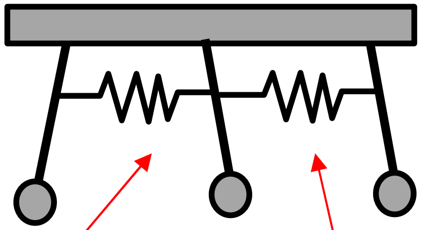
Exercice 3.3: triple puits couplés





- **Déterminer l'Hamiltonien de trois puits identiques couplés.**
- **Quels sont leurs modes propres et leurs énergies ?**

Trois pendules identiques



$\frac{\kappa}{2}(x_1 - x_2)^2$
$= \frac{1}{2}\left(x_1 \cdot \kappa \cdot x_1 - x_2 \cdot \kappa \cdot x_1 - x_1 \cdot \kappa \cdot x_2 + x_2 \cdot \kappa \cdot x_2\right)$

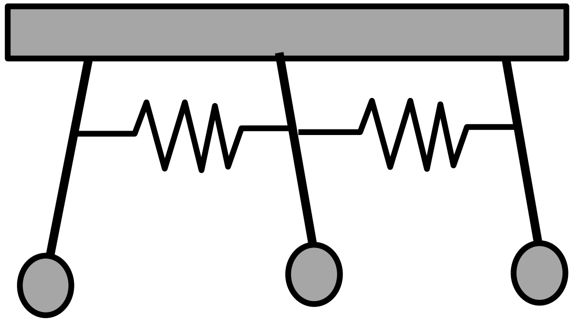
$\frac{\kappa}{2}(x_2 - x_3)^2$
$= \frac{1}{2}\left(x_2 \cdot \kappa \cdot x_2 - x_2 \cdot \kappa \cdot x_3 - x_3 \cdot \kappa \cdot x_2 + x_3 \cdot \kappa \cdot x_3\right)$

$$H = \begin{pmatrix} E_0 + T & -T & 0 \\ -T & E_0 + 2T & -T \\ 0 & -T & E_0 + T \end{pmatrix}$$

Valeurs propres	**Modes propres**
E_0	$\lvert\varphi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$E_0 + T$	$\lvert\varphi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
$E_0 + 3T$	$\lvert\varphi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Trois pendules identiques

Hamiltonien: $$H = \begin{pmatrix} E_0 + T & -T & 0 \\ -T & E_0 + 2T & -T \\ 0 & -T & E_0 + T \end{pmatrix}$$

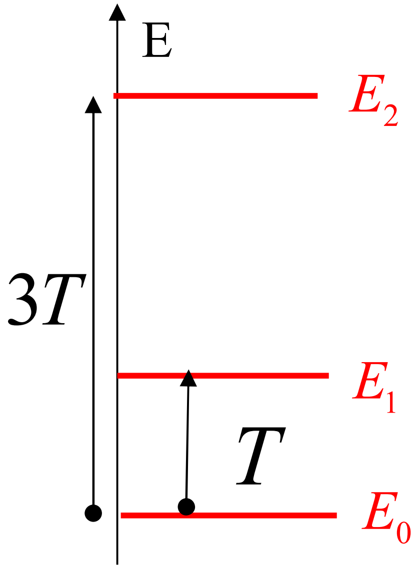


Valeurs propres

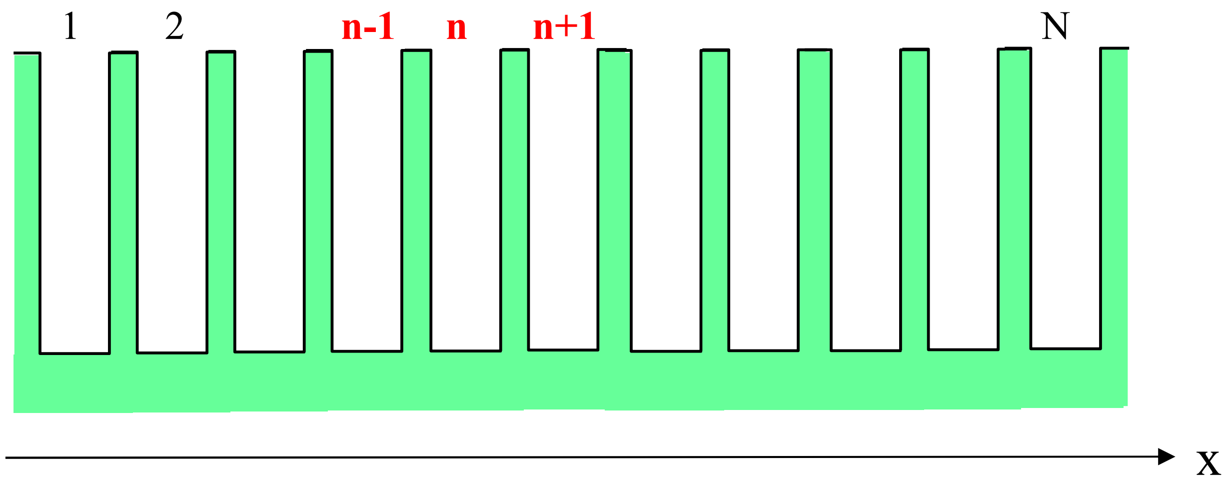
E_0 $\qquad$ $E_0 + T$ $\qquad$ $E_0 + 3T$

Modes propres

$$|\varphi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad |\varphi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad |\varphi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

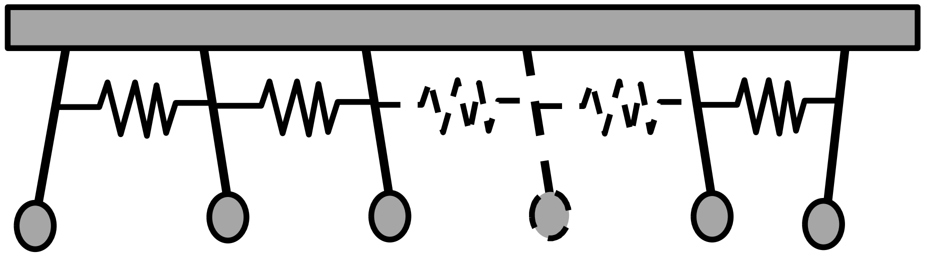


Exercice 3.4: N puits couplés

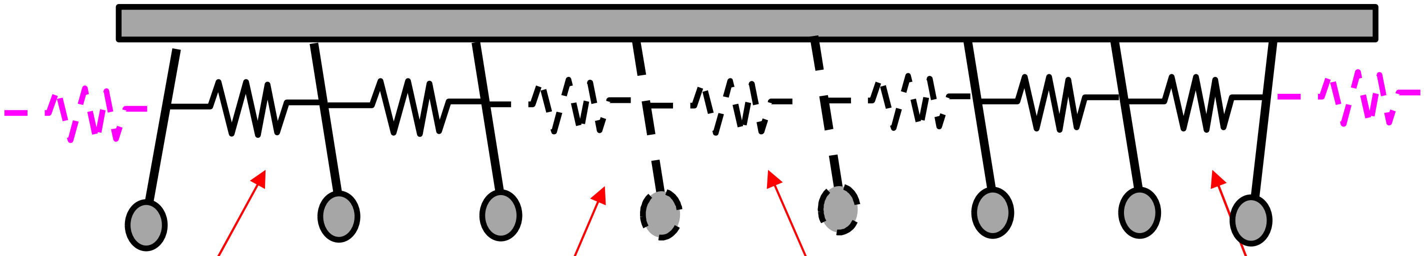


Déterminer l'Hamiltonien de N puits identiques couplés.

Modèle



Réseau de N pendules identiques



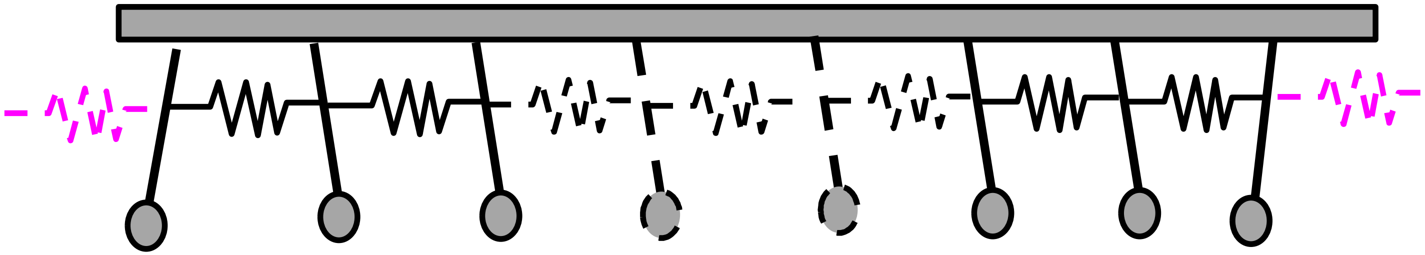
$$\tfrac{\kappa}{2}(x_1 - x_2)^2 = \tfrac{1}{2}\left(x_1\kappa x_1 - x_2\kappa x_1 - x_1\kappa x_2 + x_2\kappa x_2\right)$$

$$\tfrac{\kappa}{2}(x_n - x_{n+1})^2 = \tfrac{1}{2}\left(x_n\kappa x_n - x_{n+1}\kappa x_n - x_n\kappa x_{n+1} + x_{n+1}\kappa x_{n+1}\right)$$

$$\tfrac{\kappa}{2}(x_{n-1} - x_n)^2 = \tfrac{1}{2}\left(x_{n-1}\kappa x_{n-1} - x_n\kappa x_{n-1} - x_{n-1}\kappa x_n + x_n\kappa x_n\right)$$

$$\tfrac{\kappa}{2}(x_{N-1} - x_N)^2 = \tfrac{1}{2}\left(x_{N-1}\kappa x_{N-1} - x_N\kappa x_{N-1} - x_{N-1}\kappa x_N + x_N\kappa x_N\right)$$

Réseau de N pendules identiques



$$H = \begin{pmatrix} E_0 + 2T & -T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T \\ -T & E_0 + 2T & -T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -T & E_0 + 2T & -T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -T & E_0 + 2T & -T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -T & E_0 + 2T & -T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & -T \\ -T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T & E_0 + 2T \end{pmatrix}$$

Réseau de N pendules identiques

Recherche des modes et valeurs propres:

$$H \cdot |\varphi\rangle = E|\varphi\rangle$$

$$\Downarrow$$

Supposition:

$$H = \begin{pmatrix} E_0+2T & -T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T \\ -T & E_0+2T & -T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -T & E_0+2T & -T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -T & E_0+2T & -T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -T & E_0+2T & -T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & -T \\ -T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T & E_0+2T \end{pmatrix}$$

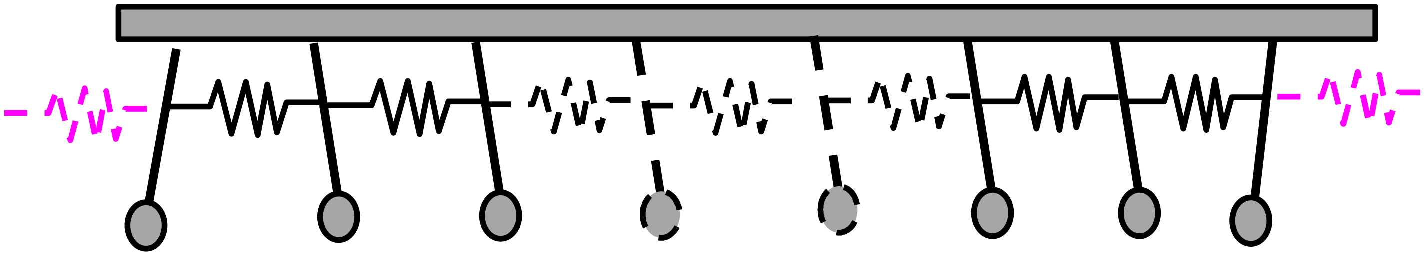
$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} e^{i(1)\delta} \\ e^{i(2)\delta} \\ \vdots \\ e^{i(n-1)\delta} \\ e^{i(n)\delta} \\ e^{i(n+1)\delta} \\ \vdots \\ e^{i(N)\delta} \end{pmatrix}$$

$$-T \cdot e^{i(n-1)\delta} + (E_0 + 2T) \cdot e^{i(n)\delta} - T \cdot e^{i(n+1)\delta} = E \cdot e^{i(n)\delta}$$

$$\Downarrow$$

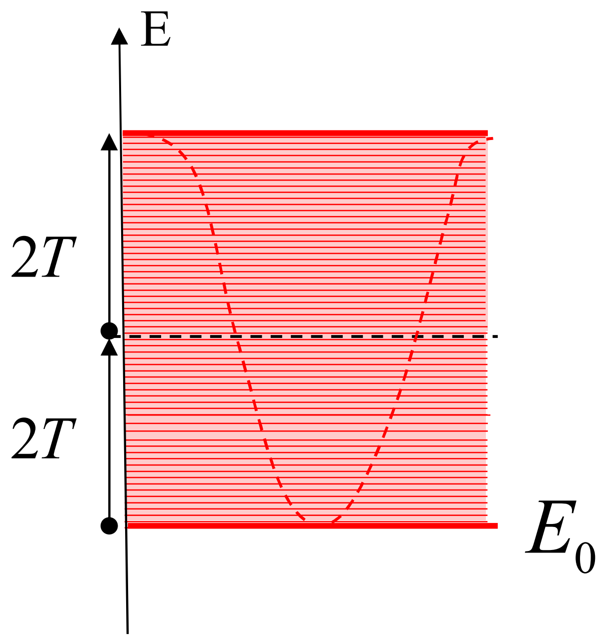
$$E(\delta) = (E_0 + 2T) - 2T \cdot \cos(\delta)$$

Réseau de N pendules identiques

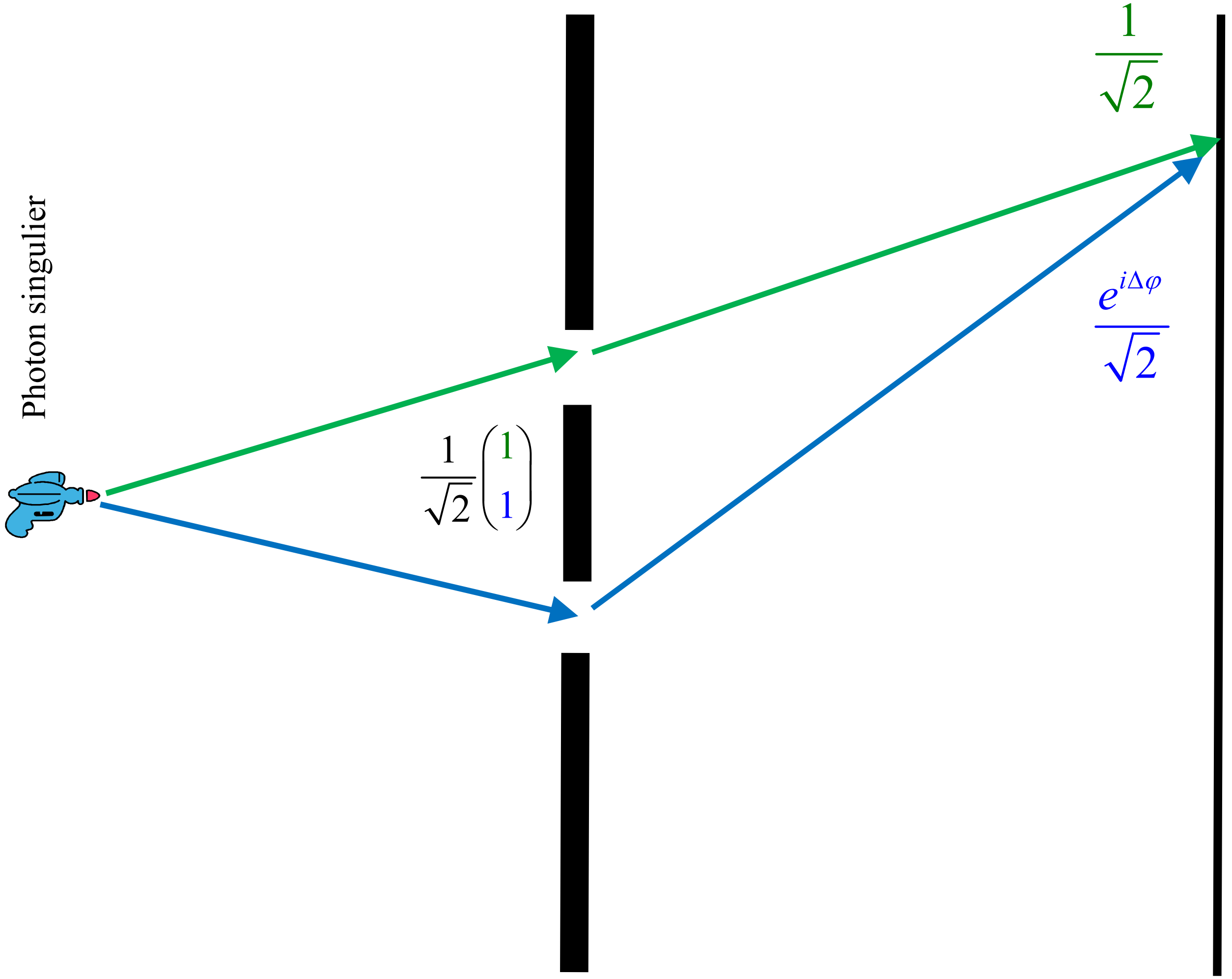


$$H=\begin{pmatrix} E_0+2T & -T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T \\ -T & E_0+2T & -T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -T & E_0+2T & -T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -T & E_0+2T & -T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -T & E_0+2T & -T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & -T \\ -T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T & E_0+2T \end{pmatrix}$$

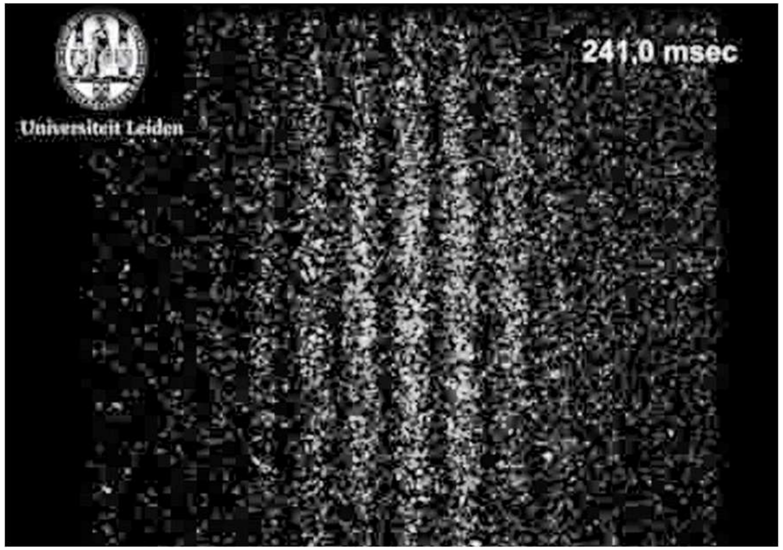
$$|\psi\rangle \cong \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \\ \alpha_n \\ \alpha_{n+1} \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix}$$



Exercice 3.7: fentes de Young, photon singulier et non-démolition

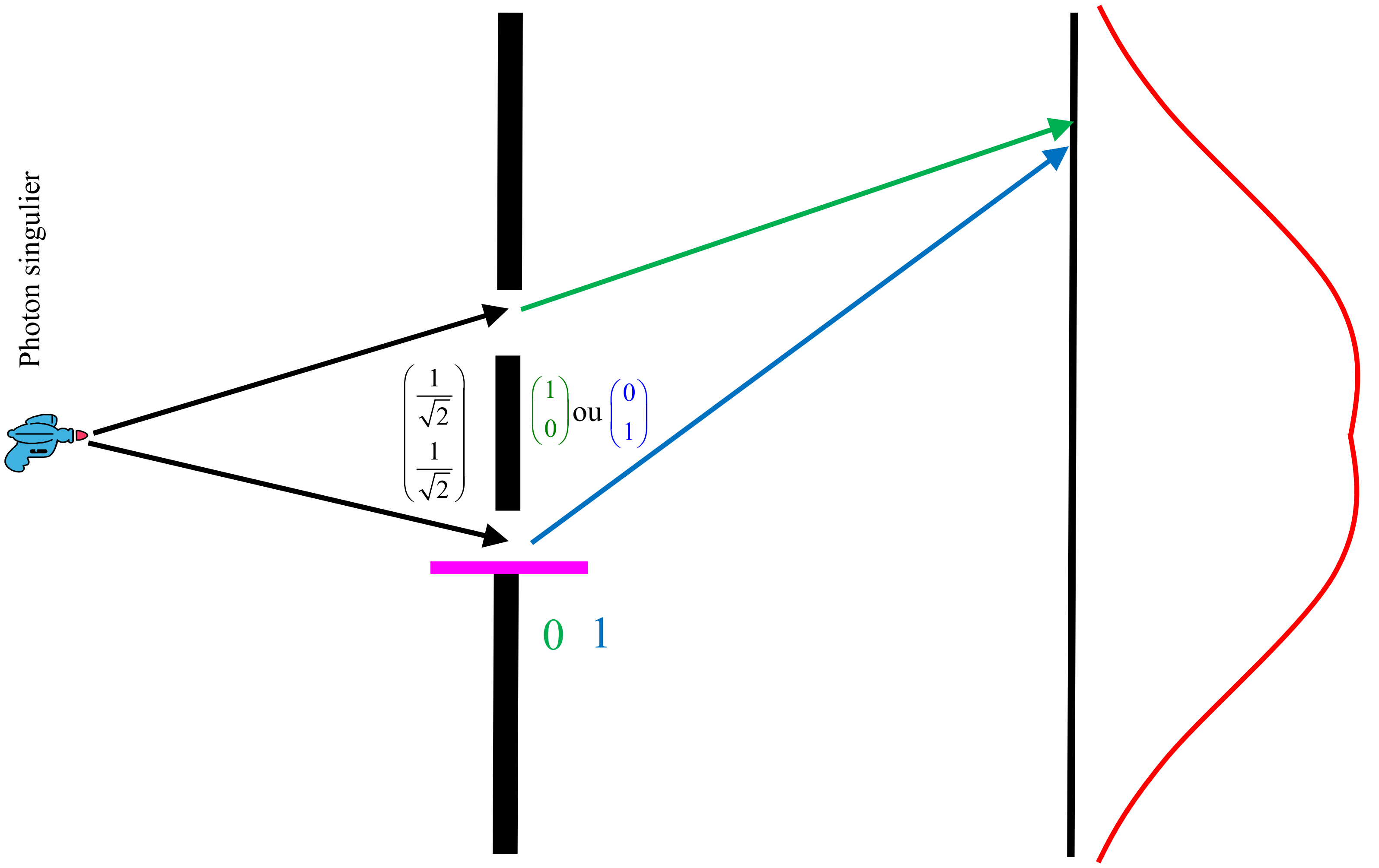


Franges d'interférence dans l'histogramme



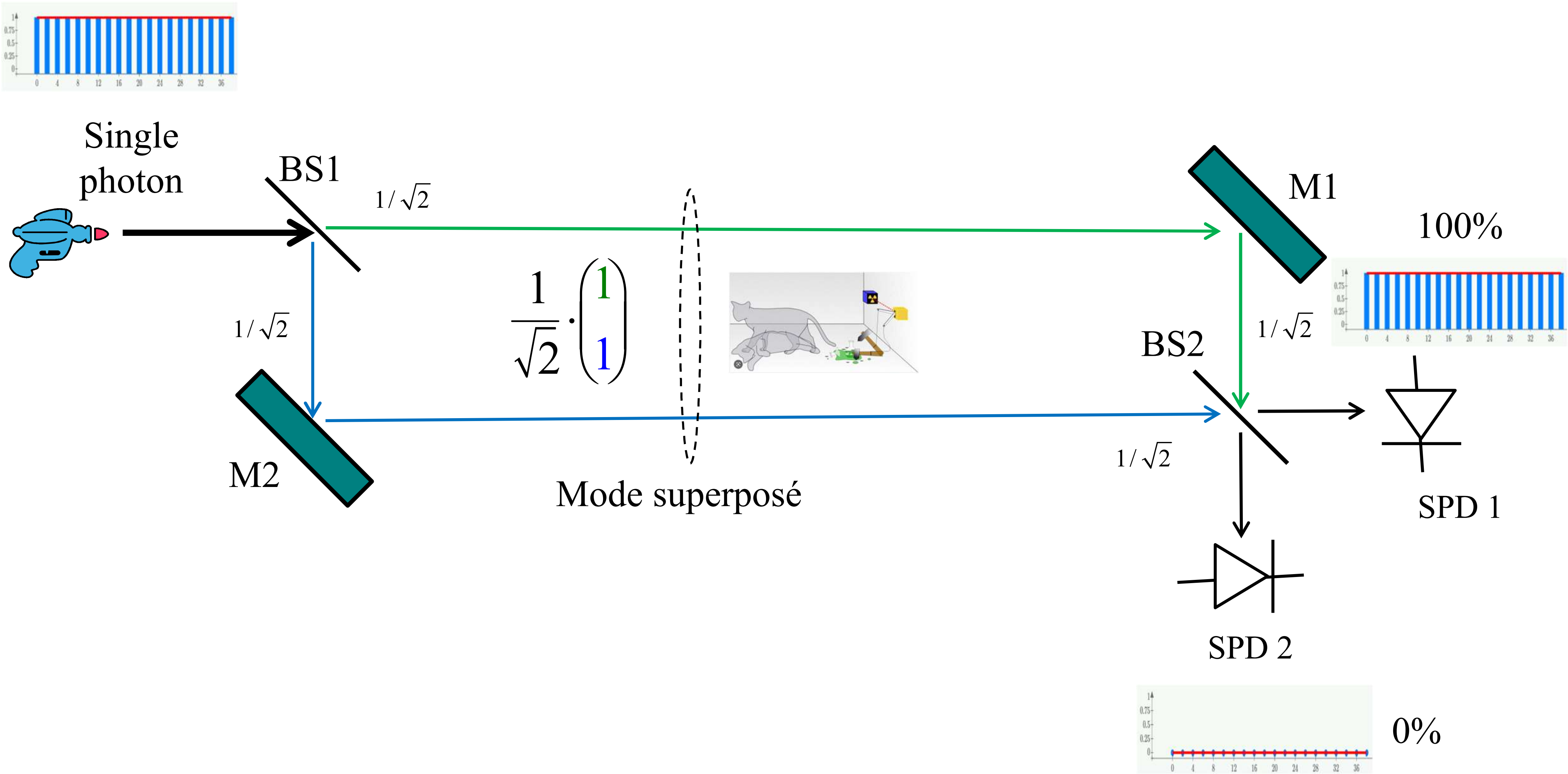
Q: que se passe-t-il si on détecte sans démolition dans une fente ?

Exercice 3.7: fentes de Young, photon singulier et non-démolition

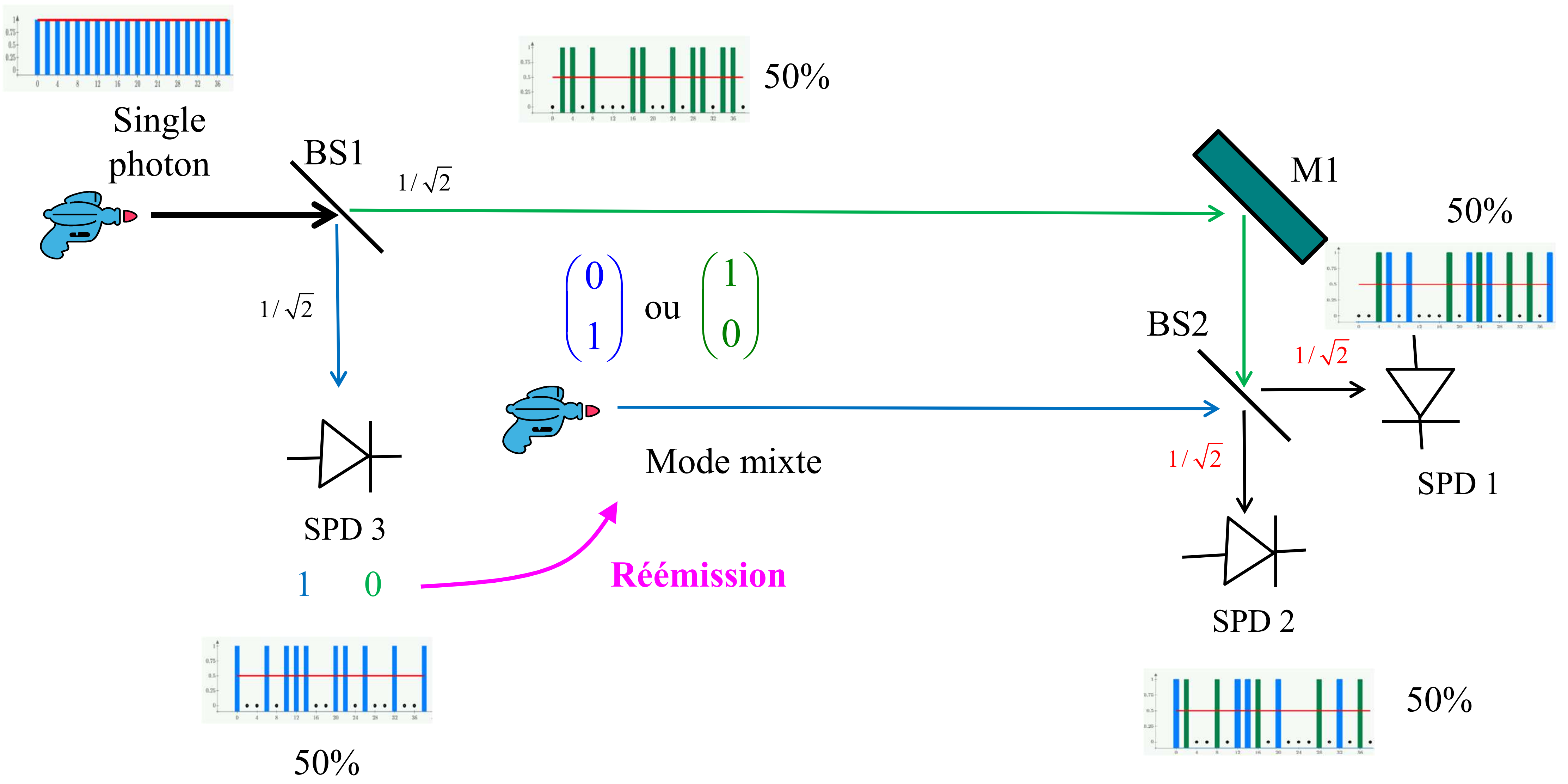


Dans l'histogramme les interférences disparaissent !!!

Exercice 1.4: Mach Zehnder interferometer: Single photon

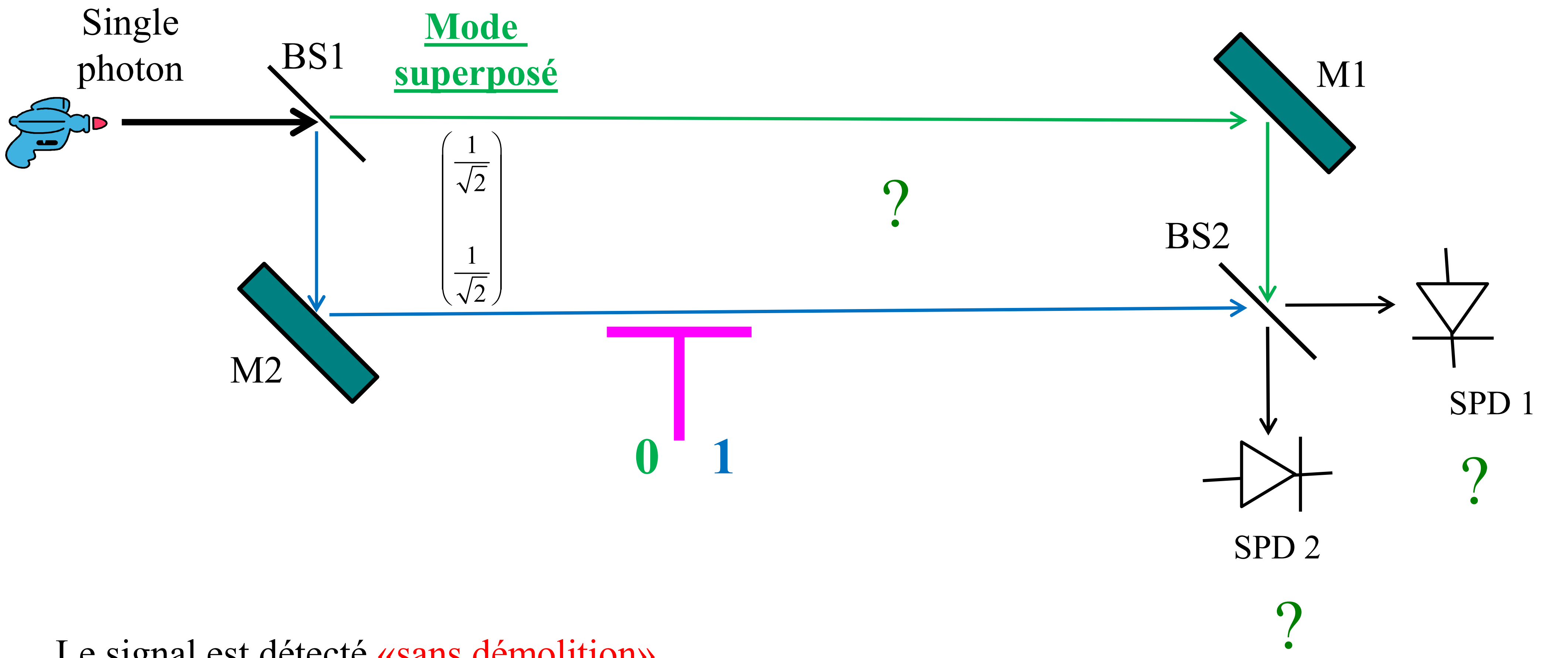


Exercice 1.3: Complément



PAB

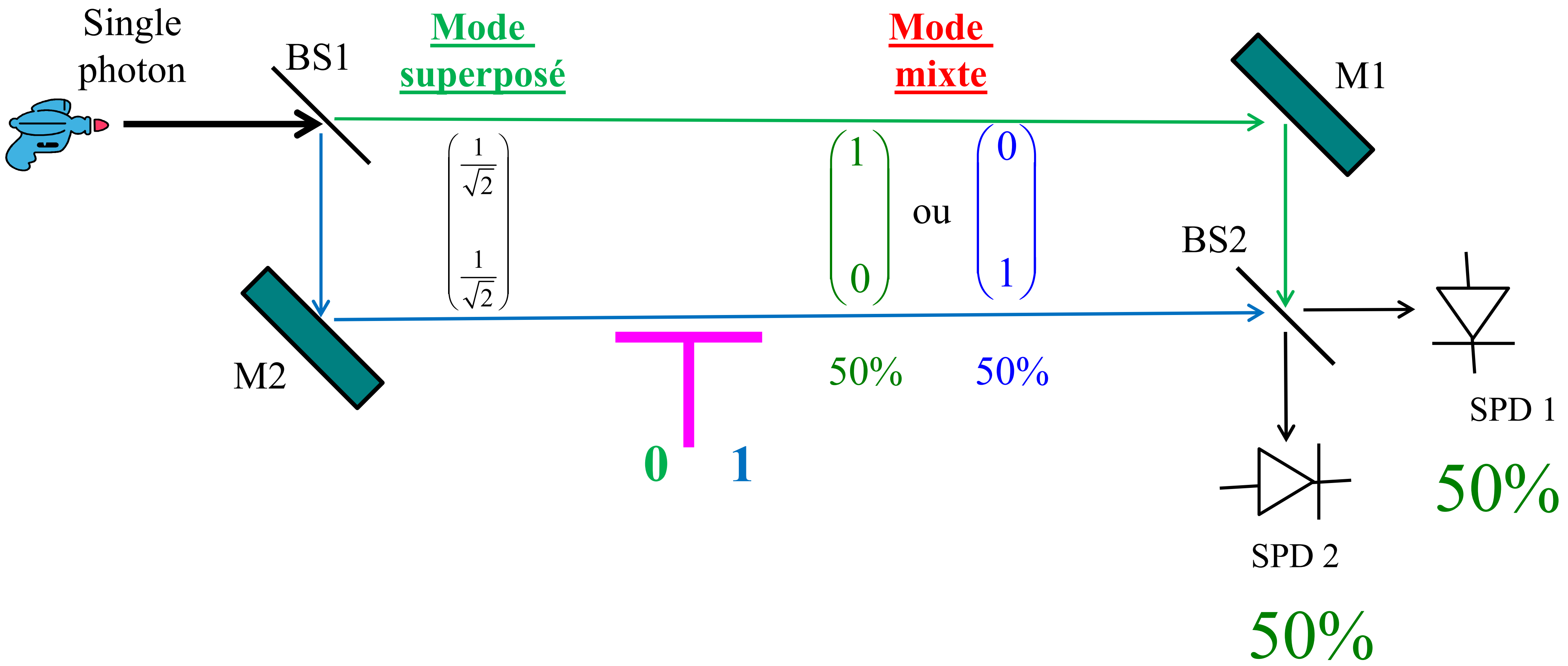
Exercice 3.5: Mach Zehnder interferometer: Single photon et détecteur idéal



Le signal est détecté «sans démolition».

- Quelle est la fonction d'onde après le détecteur ?
- Quelles sont les probabilités en sortie ?

Exercice 3.5: Mach Zehnder interferometer: Single photon et détecteur idéal



⇨ Cryptographie et sécurité